Soluções da ficha de exercícios 1

1. a) $x+1$ se $x > -\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{|x|}$ se $|x| < 2 \wedge x \neq 0$

c) divergente se $x \neq 0$, e convergente se $x = 0$ com soma *0*

d) $x, \ \forall_{x \in \Re}$

2. a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{13}{11}$ c) $\frac{10007}{9900}$ d) $\frac{374}{333}$ e) 1

3. a) $\frac{3^4}{3^5 - 1}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) *14*

5. a) divergente b) $\frac{25}{48}$ c) $\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$ d) 1 e) $\frac{73}{1080}$

7. divergente

Soluções da ficha de exercícios 2

1. convergente: a) b) c) d) e) f) h) j) l) m) n) q) s) v) w)
   divergente: g) k) p) r) t) u) x) y)
   i) convergente se $k > 1$, e divergente se $k \leq 1$

   o) convergente se $|k| < 1$, e divergente se $|k| > 1$

2. a) divergente b) convergente
3. a) b) convergente c) divergente

Soluções da ficha de exercícios 3

1. simplesmente convergente: a) g)
   absolutamente convergente: c) d) f)
   divergente b) e)
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$
3. a) $]1,3[$ b) $[-2,0[$ c) $]-1,1[$ d) $[0,2[$
4. a) $\ln \frac{1}{1-x} \quad \forall_{x\in]-1,1[}$

   b) $\frac{x}{(1-x)^2} \quad \forall_{x\in]-1,1[}$

   c) $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad \forall_{x\in]-1,1[}$

   d) $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| \quad \forall_{x\in]0,2[}$

   e) $-x + x\ln x \quad \forall_{x\in]0,2[}$

5. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1} \quad \forall_{x\in]0,4[}$

6. $\sum_{n\geq 0}(n+1)(x+1)^n \quad \forall_{x\in]-2,0[}$

7. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} \quad \forall_{x\in\Re}$

8. a) $\sum_{n\geq 0}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n \quad \forall_{x\in\Re}$

b) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{a^{2n+2}}x^{2n} \quad \forall_{x\in]-a,a[}$

c) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \forall_{x\in\Re}$

9. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{3n+3} \quad \forall_{|x|<1}$

10. $\sum_{n\geq 0}\frac{2(-1)^n x^2}{n+1}(x-1)^{n+1} \quad \forall_{x\in]0,2[}$

11. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3.2^{n-1}}(x-2)^n \quad \forall_{x\in]0,4[}$ e $f^{(17)}(2)=-\frac{17!}{3.2^{16}}$

12. $\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(\ln 2)^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]x^n \quad \forall_{x\in]-2,2[}$

13. $P_2(x)=\frac{(u'(2))^2}{2}(x-2)^2$

Soluções da ficha de exercícios 4

2b) $B_\varepsilon(a)=\begin{cases}\{a\} & \text{se } 0<\varepsilon\leq 1\\ E & \text{se } \varepsilon>1\end{cases}$

4.

a) $\operatorname{int} A=\{(x,y)\in\Re^2 : x+y<2 \wedge xy>0\}$

$frA=\{(x,y)\in\Re^2 : (x=0 \wedge x+y\leq 2)\vee(y=0 \wedge x+y\leq 2)\vee(x+y=2 \wedge xy\geq 0)\}$

$A'=A$

b) $\operatorname{int} B = \{\ \}$ $\quad frB = \Re^2 = B'$

c) $\operatorname{int} C = \{\ \}$ $\quad frC = C \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, y\right) : |y| \leq \frac{1}{2}\right\} = C'$

d)

$$\operatorname{int} D = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge y > 0\} \backslash \left(\begin{array}{l} \left\{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge x = \frac{1}{n}, n \in N\right\} \cup \\ \cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\} \end{array} \right)$$

$$frD = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge y \geq 0\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, y\right) : 0 \leq y \leq 1 \wedge n \in N\right\} \cup$$
$$\cup \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,0) : |x| \leq 2\}$$
$$D' = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0\}$$

7. $D_f = \{(x,y) \in \Re^2 \wedge (x,y) \neq (0,0) : x^2 + y^2 \neq e \wedge y \leq x\}$. D_f não é aberto nem fechado.

8.

a) $D_f = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \neq 1 \wedge x \neq 1\}$

b) $\operatorname{int} D_f = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ $\quad frD_f = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

c) D_f não é aberto nem fechado

9.

a) $D_f = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 < x^2 + (y+1)^2 < 1\}$

b) $\operatorname{int} D_f = D_f$ $\quad frD_f = \{(x,y) \in \Re^2 : x^2 + (y+1)^2 = 1\} \cup \{(0,-1)\}$

c) D_f não é compacto por não ser fechado, apesar de ser limitado, $D_f \subset B_\varepsilon\{(0,-1)\}\ \forall_{\varepsilon \geq 1}$

10.

a) $D_f = \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x^2 \wedge y \neq -x + 3 \wedge y > -x + 2\}$

b)

$$frD_f = \{(x,y) \in \Re^2 : y = x^2 \wedge y > -x+2\} \cup \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x^2 \wedge y = -x+2\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) \in \Re^2 : y \geq x^2 \wedge y = -x+3\}$$

c) D_f não é aberto nem fechado

11.

a) $D_f = \{(x,y) \in \Re^2 : (x \geq 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 16) \vee (x \leq 2 \wedge x^2 + y^2 \geq 16)\}$

b) D_f não é compacto por não ser limitado apesar de ser fechado

12.

a) $D_f = \{(x,y) \in \Re^2 : xy > 0 \wedge x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

b) $frD_f = \{(x,y) \in \Re^2 : x \geq 0 \wedge x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(0,y) \in \Re^2 : 0 \leq y \leq 2\}$

D_f não é compacto por não ser fechado apesar de ser limitado

Soluções da ficha de exercícios 5

1.

Não existe limite: a) c) d) e) f) g) k) m)

b)0 h)16 i)0 j)0 l)0

3.

a) b) contínua c) não é contínua

4. $\alpha = \frac{1}{2}$, o valor do limite é $\frac{1}{2}$

5. a)0 b)1 c)não existe

6. $k=5$

7. c) não é prolongável

8. $\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\text{-}y^3}{x\text{-}y} & \text{se} \quad y\neq x\\ 3x^2 & \text{se} \quad y=x\end{cases}$

9. $\begin{matrix}(1,a) \ \ para \ \ a\neq 0{,}1\\ (0,a) \ \ \forall_{a\in\Re}\end{matrix}$

10. a) $D_f=\{(x,y)\in\Re^2:(x\geq 0\wedge|y|<1)\vee(x\leq 0\wedge|y|>1)\}$

b) $frD_f=\{(x,y)\in\Re^2: x=0\}\cup\{(x,y)\in\Re^2:|y|=1\}$. D_f não é aberto nem fechado

c) não é prolongável

Soluções da ficha de exercícios 6

1.

a) $f_x^{'}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\cos(xy)-sen(xy)}{x^2} & \text{se} \quad x\neq 0\\ 0 \quad \text{se} \quad y=x=0 & \vee \quad (x,y)=(0,2)\end{cases}$

$D_{f_x^{'}}=\Re^2\setminus\{(0,y): y\neq 0{,}2\}$

$f_y^{'}(x,y)=\begin{cases}\cos(\text{xy}) & \text{se} \quad x\neq 0\\ 2y-1 & \text{se} \quad x=0\end{cases} \quad D_{f_y^{'}}=\Re^2$

b) $f_x^{'}(x,y)=\begin{cases}2x-y & \text{se} \quad x\neq y\\ 0 & \text{se} \quad y=x=0\end{cases} \quad D_{f_x^{'}}=\{(x,y)\in\Re^2: y\neq x\}\cup\{(0,0)\}$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}-x & \text{se } x\neq y\\ 0 & \text{se } y=x=0\end{cases}\qquad D_{f_y'}=D_{f_x'}$$

3. a) $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$ c) f não é diferenciável no ponto $(0,0)$ pois neste ponto não existem as derivadas direccionais segundo qualquer direcção
4. a) contínua em $\Re^2$ d) $f_x'(0,0)=f(1,0)=0 \wedge f_y'(0,0)=f(0,1)=0$ e) não é diferenciável
5. a) contínua em $\Re^2$ b) $\nabla f(1,1)=(-1,-1)$ c) diferenciável
6. a) $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$

   b) $$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\,sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } y=x=0\end{cases}$$

   $$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\,sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } y=x=0\end{cases}$$

7. a) $\nabla f(0,0)=(1,0)$

   b) não existe, logo f não é diferenciável nos pontos $(a,-a)$ com $a\neq 0$

   c) $$f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2+2xy}{(x+y)^2} & \text{se } x+y\neq 0\\ 1 & \text{se } y=x=0\end{cases}\qquad D_{f_x'}=\Re^2\setminus\{(a,-a):a\neq 0\}$$

   f_x' não é contínua no seu domínio pois não é contínua no ponto $(0,0)$.

   d) $f_{(1,-1)}'(2,3)=3/5$

   e) não é contínua em $\Re^2$ pois não é contínua no ponto $(0,0)$

   f) f não é diferenciável em $\Re^2$ pois não é diferenciável nos pontos $(a,-a)$ com $\forall_{a\in\Re}$

   g) $\nabla f(1,0)=(1,-2)$

   h) $f_{(1,1)}'(0,0)=0$ e $f_{(1,1)}'(1,0)=-1$

15. $$J_{f\circ g}(1,-1,1)=\begin{bmatrix}-2e^3 & 2e^3 & -2e^3\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

16. a) $J_g = \begin{bmatrix} 2x\left(f_u^{'} + f_v^{'}\right) & 2yf_v^{'} & 0 \\ yzf_w^{'} & xzf_w^{'} & xyf_w^{'} \end{bmatrix}$

b) $J_{h\circ g}(1,1,2) = e^{-3}\begin{bmatrix}-24 & -4 & 3\end{bmatrix}$

17. a) $F(t) = \begin{cases} 2^{-4/3}\mathrm{t} & \text{se} \quad \mathrm{t} \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$

b*i*) $F'(0) = 2^{-4/3}$ b*ii*) $F'(0) = 0$

c) *f* não é diferenciável no ponto $(0,0)$

18. a) $(0,0)$ minimizante global e $f(0,0) = 0$ mínimo global

b) $(2,1)$ ponto de sela

c) $(0, a, -a)$ pontos de sela $\forall_{a \in \Re}$

d) $(0, k\pi)$ pontos de sela $\forall_{k \in Z}$

19. minimizante global

20. não existem extremantes, $(0,0,\beta)$ pontos de sela $\forall_{\beta \in \Re}$

21. $(0,0)$ e $(0,-1)$ pontos de sela; $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$ minimizante local

22. b) ambos são maxmizantes locais, $f(1,-1) = f(-1,1) = 2$ máximo local

Soluções da ficha de exercícios 7

1. a) $z=-i \vee z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \vee z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $z=\pm 2 \vee z=\pm 2i \vee z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \vee z=-1$

4. a) $u(x,y)=\frac{(x+2)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} \quad v(x,y)=\frac{y(x-1)-y(x+2)}{(x-1)^2+y^2}$

b) $u(x,y)=4x+3y \quad v(x,y)=3x+4y+4$

5. a) $z=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2k\pi i \quad k\in Z$

b) $z=(2k+1)\pi i \quad k\in Z$

c) $z=2k\pi-\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)i \quad k\in Z$

d) $z=-k\pi+k\pi i \quad k\in Z$

6. a) $-6+9i$ b) $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$ c) -2 d) $\frac{1}{2}$

7. a) $C\setminus\{x+iy : x\le -1 \wedge y=1\}$

b) $C\setminus\{x+iy : x^2-y^2+1\le 0 \wedge 2xy=0\}$

c) $C\setminus\left\{\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

9. a) e b) Não

11. $z_0=-1-i$ e $f'(z_0)=-2-2i$

12. $f(z)=\left(1+\frac{i}{2}\right)z^2+ic \quad c\in\Re$ e $f'(z)=(2+i)z$

14. $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}\\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\end{cases}$

15. a) C b) $C\setminus\{0\}$

16. $u(x,y)=3xy^2-x^3-3x^2y+y^3$

17.
$$k = 0,1,2$$
$$f_0 = ic \quad \text{com} \quad c \in \Re$$
$$f_1 = x - y + i(x + y + c) \quad \text{com} \quad c \in \Re$$
$$f_2 = x^2 - y^2 + i(2xy + c) \quad \text{com} \quad c \in \Re$$

18. $v(x, y) = 2xy - 3y + c \quad \text{com} \quad c \in \Re$

19. $f(x+iy) = (-3x^2y + y^3) - i(3xy^2 - x^3 - 2)$ ou $f(z) = (z^3 + 2)i$

20. b) $v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\,sen\,y) + c \quad \text{com} \quad c \in \Re$

c) $f(z) = ize^{-z} + \text{ic} \quad f'(2+i) = (1-i)e^{-2-i}$